ÜBER p - AUTOMORPHISMEN ENDLICHER p - GRUPPEN

Dissertation,

der Mathematischen Fakultät

der Eberhard - Karls - Universität zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

vorgelegt von

OTTMAR MÜLLER

aus Tübingen

1979

ÜBER p - AUTOMORPHISMEN ENDLICHER p - GRUPPEN

Dissertation,

der Mathematischen Fakultät

der Eberhard - Karls - Universität zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

vorgelegt von

OTTMAR MÜLLER

aus Tübingen

1979

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Qualifikation: 24. Juli 1979

Dekan:	Prof. Dr. H. Salzmann
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. P. Schmid
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Ch. Hering

Gedruckt bei Fa. H.-J. Köhler, Reprografischer Betrieb, Neue Straße 11, 7400 Tübingen

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung..... 1
Notation..... 7
1. Fortsetzen von Automorphismen..... 10
2. Einige cohomologische Hilfssätze..... 16
3. Maximale Untergruppen..... 21
4. Zentrale Automorphismen..... 30
5. Automorphismen, die die
Frattinifaktorgruppe zentralisieren..... 35
6. Nichtinnere Automorphismen der Ordnung p..... 43
Anhang..... 49
Lebenslauf..... 55

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548919_0008

Einleitung

I. Hauptergebnisse

In den letzten 50 Jahren waren Automorphismen endlicher p-Gruppen häufig Gegenstand von Untersuchungen (p Primzahl). Das überragende Resultat stammt wohl von Gaschütz [11], der 1966 zeigte, daß jede endliche p-Gruppe G mit mehr als p Elementen einen nichtinneren p-Automorphismus besitzt. 1976 hat Schmid [19] gezeigt, daß die äußere Automorphismengruppe einer p-Gruppe G stets einen nichttrivialen p-Normalteiler enthält, sofern G weder elementarabelsch noch extraspeziell ist.

Nach einem bekannten Resultat von Burnside ist die Gruppe $\mathrm{Aut}^{\Phi}(G)$ der die Frattinifaktorgruppe $G/\Phi(G)$ zentralisierenden Automorphismen einer p-Gruppe stets eine p-Gruppe. Offenbar ist $\mathrm{Aut}^{\Phi}(G)$ ein p-Normalteiler von $\mathrm{Aut}(G)$, der die Gruppe $\mathrm{Inn}(G)$ der inneren Automorphismen von G umfaßt ($\Phi(G)$ ist der kleinste Normalteiler von G mit elementarabelscher Faktorgruppe). Kürzlich haben Bryant und Kovács [5] gezeigt, daß $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Aut}^{\Phi}(G)$ eine beliebige lineare Gruppe sein kann,

d.h. zu einer vorgegebenen linearen Gruppe X auf einem $\mathbb{F}_p$-Vektorraum der Dimension $d \geq 2$ gibt es eine p-Gruppe G mit $|G/\Phi(G)| = p^d$, so daß $Aut(G)/Aut^{\Phi}(G) \cong X$ ist als lineare Gruppen. Wir zeigen, daß $Aut^{\Phi}(G)$ stets seinen Zentralisator in Aut(G) und damit die Zentren aller p-Sylowgruppen von Aut(G) enthält (Satz 5.2).

Infolgedessen ist die Gruppe $Aut^{\Phi}(G)$ von zentraler Bedeutung für das Studium von p-Automorphismen einer endlichen p-Gruppe. Mein erstes Hauptergebnis zeigt, daß $Aut^{\Phi}(G)$ i.a. Inn(G) echt enthält:

1. Hauptsatz

Sei G eine endliche p-Gruppe. Dann und nur dann gilt $Aut^{\Phi}(G) = Inn(G)$, wenn G entweder elementarabelsch oder extraspeziell ist.

Zur Erinnerung: Eine nichtabelsche p-Gruppe heißt extraspeziell, falls G/Z(G) elementarabelsch und $|Z(G)| = p$ ist.

Beim Beweis werden keinerlei tiefliegende Strukturssätze über p-Gruppen verwendet. Der Beweis stützt sich vielmehr auf elementare Betrachtungen der Einbettung maximaler Untergruppen bzw. deren Zentren in die vorgegebene p-Gruppe. Der Beweisabschluß wird induktiv geführt; dabei wird von einem Kriterium über die Fortsetzbarkeit von Automorphismen Gebrauch gemacht, das schon in Schmid [19] Anwendung fand.

Neben der Frage nach der Existenz von p-Normalteilern in der Gruppe der äußeren Automorphismen einer p-Gruppe wurden seit 1965 unter anderen folgende Probleme diskutiert:

(a) Ist die Ordnung $|G|$ von G ein Teiler von $|\mathrm{Aut}(G)|$, wenn immer G eine nichtzyklische p-Gruppe ist?

(b) Hat jede endliche nichtabelsche p-Gruppe G einen nichtinneren Automorphismus der Ordnung p?

Zur Frage (a) habe ich keine Beiträge. (Nur in sehr speziellen Situationen ist hier bisher eine Antwort gegeben worden. Buckley [6] hat dieses Problem auf solche Gruppen G reduziert, für die das Zentrum $Z(G)$ in $\Phi(G)$ liegt). Problem (b) bedarf vielleicht einiger Erläuterungen. Nach dem Satz von Gaschütz [11] hat G sicher einen nichtinneren Automorphismus von p-Potenzordnung. Zerfällt beispielsweise $\mathrm{Aut}(G)$ über $\mathrm{Inn}(G)$, dann gibt es auch einen solchen Automorphismus der Ordnung p. Dies ist jedoch i.a. nicht der Fall.

Was man zur Beantwortung von (b) gebrauchen könnte, wäre ein "lokaler Zerfällungssatz" für die Automorphismengruppe. Das ist in dieser Allgemeinheit aber

praktisch nicht angreifbar. Induktionsbeweise wie für den 1. Hauptsatz führen auch nicht zum Ziel, da man beim Fortsetzen von Automorphismen keine Kontrolle über die Ordnung behält.

Ist G eine nichtabelsche reguläre p-Gruppe (im Sinne von P. Hall), so können wir zeigen, daß die 1-Cohomologie

$$H^1(G/\Phi(G), Z(\Phi(G))) \neq 0$$

ist (Satz 6.3). Daraus können wir folgern:

2. Hauptsatz

Jede nichtabelsche reguläre p-Gruppe hat einen nichtinneren Automorphismus der Ordnung p.

Ich weiß nicht, ob es eine nichtabelsche p-Gruppe gibt, die keinen nichtinneren Automorphismus der Ordnung p besitzt.

II. Methode

Sei G eine endliche nichtabelsche p-Gruppe. Besitzt G eine maximale Untergruppe M mit $Z(M) \subseteq Z(G)$, so gibt es einen nichtinneren Automorphismus der Ordnung p, der auf $G/\Phi(G)$ trivial operiert, sowie einen solchen, der M

und $G/Z(M)$ zentralisiert. Dies ist sehr leicht einzusehen (Abschnitt 3). Gibt es keine solche maximale Untergruppe, so ist $Z(G) \subsetneq Z(M)$ für alle maximalen Untergruppen M von G. Wir nennen G "Frattinisch", falls

$$Z(G) \subsetneq Z(M) \leq \Phi(G)$$

gilt für alle maximalen Untergruppen M von G. Die maximale "Frattini-Erweiterung" mit elementarabelschem Kern jeder nichtzyklischen p-Gruppe ist in diesem Sinne Frattinisch (siehe Beispiel 3.5). Die speziellen p-Gruppen und die p-Gruppen maximaler Klasse sind sämtlich nicht Frattinisch. Ist G nicht Frattinisch, so gilt

$$H^1(G/\Phi(G), Z(\Phi(G))) \neq 0$$

(Satz 3.7). Daraus folgern wir, daß jede nicht-Frattinische p-Gruppe einen nichtinneren Automorphismus der Ordnung p hat.

Der Zusammenhang von 1-Cohomologie und Automorphismen ist von grundsätzlicher Bedeutung; siehe dazu § 1. Für die Untersuchung von p-Gruppen wichtig ist weiter der Satz von Gaschütz (2.1), wonach ein endlicher G-Modul M einer p-Gruppe G cohomologisch trivial ist, sobald $H^1(G,M) = 0$ ist. Dies ermöglicht oft den Übergang zu

zyklischen Gruppen der Ordnung p, deren Cohomologie man genau beschreiben kann.

III. Inhaltsübersicht

In Abschnitt 1 werden einige Kriterien zusammengestellt, wann Automorphismen sich von Normalteilern auf die ganze Gruppe fortsetzen lassen. Es werden nur die für uns relevanten speziellen Situationen betrachtet. Die benötigten cohomologischen Hilfssätze findet man in Abschnitt 2.

In Kapitel 3 untersuchen wir die Einbettung der maximalen Untergruppen bzw. deren Zentren. Die Struktur der Frattinischen p-Gruppen wird diskutiert und der vorhin zitierte Satz 3.7 bewiesen. Jede nicht-Frattinische (nichtabelsche) p-Gruppe G besitzt eine maximale Untergruppe M mit $H^1(G/M, Z(M)) \neq 0$ (Satz 3.6).

Zentrale Automorphismen sind Gegenstand der Untersuchung in Abschnitt 4. Wir zeigen unter anderem, daß jede nicht-Frattinische p-Gruppe mit nichtzyklischem Zentrum einen nichtinneren zentralen Automorphismus der Ordnung p besitzt (Satz 4.6).

Die beiden Hauptsätze werden in den letzten beiden

Paragraphen bewiesen. In einem Anhang geben wir die benötigten Informationen über die maximalen Frattini-Erweiterungen.

IV. Notation

Alle betrachteten Gruppen (und Moduln) sind endlich, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt. Ist G eine (endliche) Gruppe, so sei:

$|G|$ = Ordnung von G

$\exp(G)$ = Exponent von G

$Z(G)$ = Zentrum von G

$\Phi(G)$ = Frattinigruppe von G

$G' = [G,G]$ Kommutatorgruppe von G

$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^{y}$ Kommutator der Gruppenelemente x,y

$\Omega_1(G) = \langle x | x \in G,\ x^p = 1 \rangle$

$\mho_1(G) = \langle x^p | x \in G \rangle$

$O_p(G)$ = größter p-Normalteiler von G

$d(G)$ = minimale Erzeugendenzahl von G (ist G eine p-Gruppe, so ist $|G:\Phi(G)| = p^{d(G)}$)

$A_p(G)$ = Frattini-Modul von G über $\mathbb{F}_p$ (siehe Anhang)

$\mathbb{F}_p$ = Primkörper mit p Elementen

$\mathrm{Aut}(G)$ = die volle Automorphismengruppe von G

$\mathrm{Inn}(G)$ = Gruppe der inneren Automorphismen von G

$\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ Gruppe der äußeren Automorphismen von G

$\mathrm{Aut}^N(G)$ = Gruppe der Automorphismen von G, die auf der Faktorgruppe G/N nach dem Normalteiler N von G trivial operieren

$\mathrm{Aut}_M(G)$ = Gruppe der Automorphismen von G, die den Normalteiler M von G zentralisieren

$\mathrm{Aut}_M^N(G) = \mathrm{Aut}^N(G) \cap \mathrm{Aut}_M(G)$

$\mathrm{Aut}^{\Phi}(G) = \mathrm{Aut}^{\Phi(G)}(G)$, $\mathrm{Aut}_Z(G) = \mathrm{Aut}_{Z(G)}(G)$ und ähnliches

$C_G(H)$ = Zentralisator in G der Untergruppe H von G

Ist M ein G-Modul , so ist

$Z^1(G,M)$ = Gruppe der verschränkten Homomorphismen (Derivationen)

$B^1(G,M)$ = Gruppe der inneren Derivationen

$H^n(G,M)$ = n-te Cohomologie des G-Moduls M

$(H^1(G,M) = Z^1(G,M)/B^1(G,M))$

$M^G = H^0(G,M) = C_M(G)$ = Fixmodul von M unter G

$\Phi_G(M)$ = Durchschnitt aller maximalen G-Teilmoduln von M

Moduln sind stets Rechtsmoduln (Wirkung $(m,g) \longmapsto mg$; ist M ein abelscher Normalteiler von G, so schreiben wir $m^g = g^{-1}mg$ statt mg).

$\mathrm{Hom}(G,M)$ = Gruppe aller Homomorphismen von M in G

$\mathrm{Ext}(G/G',M)$ = Gruppe der Äquivalenzklassen abelscher Erweiterungen von G/G' durch M

$H_2(G) = H_2(G,\mathbb{Z})$ = Schurmultiplikator von G

Herrn Prof. P. Schmid danke ich für seine unermüdliche Hilfsbereitschaft, die er mir während der Anfertigung der vorliegenden Arbeit zuteil werden ließ. Große Teile dieser Arbeit wären ohne seine Anregungen und Ratschläge nicht möglich gewesen. Ich schulde Herrn Schmid mehr als nur formalen Dank.

1. Fortsetzen von Automorphismen

Es ist eine grundlegende Frage in der Theorie der Automorphismengruppen, ob Automorphismen von Normalteilern zur ganzen Gruppe fortgesetzt oder von Faktorgruppen geliftet werden können. Dies ist insbesondere von Bedeutung bei Induktionsbeweisen. Wir geben hier einige Resultate an, in denen die Fortsetzbarkeit garantiert wird.

(1.1) Lemma

Sei N ein Normalteiler einer (nicht notwendig endlichen) Gruppe G. Es gibt dann einen natürlichen Isomorphismus

$$Z^1(G/N,Z(N)) \longrightarrow \mathrm{Aut}_N^N(G),$$

der jedem verschränkten Homomorphismus $f: G/N \longrightarrow Z(N)$ den Automorphismus $x \longmapsto xf(Nx)$ von G zuordnet. $B^1(G/N,Z(N))$ wird auf die von Z(N) induzierte Gruppe innerer Automorphismen von G abgebildet.

Beweis: Huppert [16, Satz I. 17.1]. □

Man beachte:

Ist $Z(N)$ eine p-Gruppe, so ist auch $\mathrm{Aut}_N^N(G) \cong Z^1(G/N, Z(N))$ eine p-Gruppe. Liegt $Z(N)$ in $Z(G)$, so ist $\mathrm{Aut}_N^N(G) \cong \mathrm{Hom}(G/N, Z(N))$. Ferner ist $\mathrm{Aut}_N^N(G) = \mathrm{Aut}_N^{Z(N)}(G)$. Ist $N \subseteq M \subseteq G$, so ist $\mathrm{Aut}_M^N(G) \cong Z^1(G/M, Z(N))$. Ist N charakteristisch in G, so ist $\mathrm{Aut}_N^N(G)$ ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}(G)$.

Lemma 1.1 wenden wir meist in folgender Situation an:

(1.2) Korollar

Sei N ein Normalteiler von G mit $C_G(N) = Z(N)$. Ist $H^1(G/N, Z(N)) \neq 0$, so ist $\mathrm{Aut}_N^N(G)$ nicht in $\mathrm{Inn}(G)$ enthalten.

Beweis: Ist $C_G(N) = Z(N)$, so wird $B^1(G/N, Z(N))$ auf die Gruppe aller inneren Automorphismen abgebildet, die N und G/N zentralisieren. □

Mit der Fortsetzbarkeit von Automorphismen bei faktorisierten Gruppen befaßt sich folgendes Lemma:

(1.3) Lemma

Sei $G = MN$, wobei M eine Untergruppe und N ein Normalteiler von G ist. Ferner sei α ein Automorphismus von M, der $M/C_M(N)$ zentralisiert, und β ein Automorphismus

von N, der die Gruppe aller von M auf N induzierten Automorphismen zentralisiert. Induzieren α und β auf $M \cap N$ den gleichen Automorphismus, so gibt es genau einen Automorphismus γ von G, der α und β fortsetzt.

Beweis: Für $x \in M$ und $y \in N$ definieren wir

$$(xy)^\gamma = x^\alpha y^\beta.$$

Ist $x_o y_o = xy$, so ist $x^{-1}x_o = yy_o^{-1} \in M \cap N$ und $x_o^\alpha y_o^\beta = x^\alpha y^\beta$. Also ist γ wohldefiniert. Benützt man die Voraussetzungen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(x_o y_o xy)^\gamma &= (x_o x(y_o)^x y)^\gamma \\ &= x_o^\alpha x^\alpha (y_o^x)^\beta y^\beta \\ &= x_o^\alpha x^\alpha (y_o^\beta)^x y^\beta \\ &= x_o^\alpha x^\alpha (x^\alpha)^{-1} y_o^\beta x^\alpha y^\beta \\ &= (x_o y_o)^\gamma (xy)^\gamma.\end{aligned}$$

Es ist klar, daß γ ein Automorphismus von G ist, der α und β fortsetzt. □

(1.4) Korollar

Ist $G = MN$ ein zentrales Produkt von M und N, d.h. $[M,N] = 1$, dann läßt sich jedes Paar α, β von Automorphismen von M und N, die auf $M \cap N$ den gleichen

Automorphismus induzieren, zu einem Automorphismus γ von G fortsetzen. Ist α (oder β) nichtinner, so ist auch γ nichtinner.

(1.5) Korollar

Sei $G = MN$ ein semidirektes Produkt des Normalteilers N mit der Untergruppe M. Ist α ein Automorphismus von M, der $M/C_M(N)$ zentralisiert, so kann α zu einem N zentralisierenden Automorphismus von G fortgesetzt werden.

Liegt keine Faktorisierung wie in (1.3) vor, so kann man mögliche Fortsetzungen von Automorphismen i.a. nicht mehr derart explizit beschreiben. Nützlich ist der folgende Satz:

(1.6) Satz (Schmid [19], Proposition 2.1)

Sei N ein Normalteiler von G derart, daß $C_G(N) = Z(N)$ und $H^2(G/N, Z(N)) = 0$ ist. Ist A eine Automorphismengruppe von N, die die Gruppe D der von G auf N induzierten Automorphismen normalisiert, so kann A zu einer Automorphismengruppe B von G fortgesetzt werden. Ist zudem $[D,A] \leq \mathrm{Inn}(N)$, so wird G/N von B zentralisiert.

Beweis: Schmid [19, Proposition 2.1] □

Einen Beweis für (1.6) findet man auch in [20], Kapitel 9. Dort wird gezeigt, daß das Liften von Automorphismen auf ein Fixpunktproblem zurückgeführt werden kann, nämlich via einer Permutationsdarstellung auf der Menge der "Äquivalenzklassen" von Erweiterungen. Ist N ein abelscher Normalteiler von G (und damit ein G/N-Modul), so läuft diese Wirkung auf die übliche Modulstruktur von $H^2(G/N,N)$ hinaus.

(1.7) Lemma

Sei N ein abelscher Normalteiler von G und A eine Automorphismengruppe von N, die die von G auf N induzierte Automorphismengruppe zentralisiert. Dann ist A eine Gruppe von G/N-Modulautomorphismen von N. A kann genau dann zu einer G/N zentralisierenden Automorphismengruppe von G fortgesetzt werden, falls A trivial auf $H^2(G/N,N)$ operiert.

Beweis: Dies ist ein Spezialfall von Satz 9.4 in [20]. □

Wir geben eine Anwendung:

(1.8) Beispiel

Sei G eine endliche p-Gruppe der Klasse 2. Ist A eine Gruppe von Potenzautomorphismen von Z(G) mit

$\exp(Z(G)^A) \geq \exp(G/Z(G))$, so läßt sich A zu einer $G/Z(G)$ zentralisierenden Automorphismengruppe von G fortsetzen.

Beweis: Bekanntlich operiert A auf $H^2(G/Z(G),Z(G))$ wie auf $Z(G)$ durch Potenzautomorphismen (Skalarmultiplikation!). Nach dem Universellen Koeffiziententheorem der Cohomologie ([14], p. 49) besteht eine natürliche kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(G/Z(G),Z(G)) \longrightarrow H^2(G/Z(G),Z(G)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_2(G/Z(G)),Z(G)) \longrightarrow 0,$$

die nicht natürlich zerfällt. Da $G/Z(G)$ abelsch ist, ist nach Huppert [16], Satz V. 25.11 $\exp(H_2(G/Z(G))) \leq \exp(G/Z(G))$. Wir schließen auf

$$\exp(H^2(G/Z(G),Z(G))) \leq \exp(G/Z(G)).$$

Die Voraussetzung liefert nun, daß A trivial auf $H^2(G/Z(G),Z(G))$ operiert. Wende (1.7) an. □

(1.9) Spezialfall

Sei G eine endliche p-Gruppe mit zyklischem Zentrum $Z(G)$. Ist $G/Z(G)$ elementarabelsch, so läßt sich jeder p-Automorphismus von $Z(G)$ zu einem zentralen Automorphismus von G fortsetzen (siehe § 4).

2. Einige cohomologische Hilfssätze

Der Zusammenhang von 1-Cohomologie und Automorphismen ist von grundsätzlicher Bedeutung (siehe dazu § 1). Die benötigten cohomologischen Hilfssätze stellen wir in diesem Abschnitt bereit.

(2.1) Satz (Gaschütz [10])

Sei G eine endliche p-Gruppe und M ein endlicher G-Modul derart, daß $H^1(G,M) = 0$ ist. Dann ist auch $H^n(H,M) = 0$ für alle $n \geq 1$ und alle Untergruppen H von G.

Dieser Satz ist grundlegend für die Untersuchung von p-Automorphismen endlicher p-Gruppen, wie (1.1) deutlich macht. Er reduziert die Frage, wann ein Modul triviale Cohomologie hat, im wesentlichen auf die entsprechende Frage für zyklische Gruppen der Ordnung p.

Sei $G = \langle x \rangle$ eine zyklische Gruppe und M ein G-Modul. Ist M^σ das Bild von M unter der Spurabbildung

$$\sigma: m \longmapsto m^\sigma = m(1 + x + x^2 + \ldots + x^{|G|-1})$$

von M und M_σ der Kern von σ, so gilt bekanntlich ([20], Satz 5.3):

$$H^n(G,M) = \begin{cases} M^G/M^\sigma, & \text{falls n gerade,} \\ M_\sigma/[M,G] & \text{sonst.} \end{cases}$$

(2.2) Lemma

Sei $G = \langle x \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung p und M ein endlicher G-Modul von p-Potenzordnung. Ist $M^G \not\subseteq \Phi_G(M)$, so ist $H^1(G,M) \neq 0$.

Beweis: Angenommen, es sei $H^1(G,M) = 0$ und $M^G \not\subseteq \Phi_G(M)$. Nach (2.1) ist dann auch $H^2(G,M) = 0$. Es gibt einen maximalen G-Teilmodul N von M mit $M = NM^G$, denn nach Voraussetzung ist $M^G \not\subseteq \Phi_G(M)$. Es gilt somit für das Bild der Spurabbildung

$$M^\sigma = (NM^G)^\sigma = M^\sigma \sigma_1(M^G) = N^\sigma,$$

denn $\sigma_1(M^G) = \Phi(M^G)$ ist die Menge der Nichterzeuger von M^G. Wegen $H^2(G,M) = 0$ ist nun $M^G = M^\sigma = N^\sigma \subseteq N$, ein Widerspruch. □

(2.3) Lemma

Sei $G = \langle x \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung p und M ein endlicher G-Modul von p-Potenzordnung. Ist $|M:M^G| = p$, so ist $H^1(G,M) \neq 0$, außer M ist zyklisch oder $|M| = 4$.

Beweis: Angenommen, $H^1(G,M)$ verschwindet und M ist

nicht zyklisch. Dann ist $M^G = M^\sigma$. Für jedes $m \in M$, welches nicht in M^G liegt, gilt wie in (2.2)

$$M^G = \langle M^G, m\rangle^\sigma = \langle m^\sigma\rangle.$$

Daher ist M^G zyklisch. Da M nicht zyklisch ist, gibt es ein $m \in M \setminus M^G$ mit $pm = 0$. Folglich ist $|M^G| = p$. Da $G = \langle x\rangle$ den Faktor M/M^G der Ordnung p zentralisiert, gilt $mx = m + \overline{m}$ für ein $\overline{m} \in M^G$. Es ergibt sich $m^\sigma = \frac{1}{2}p(p-1)\overline{m}$. Dies erzwingt $p = 2$ und $|M| = 4$. □

(2.4) Bemerkung

Sei wiederum $G = \langle x\rangle$ zyklisch der Ordnung p und $M \neq 0$ ein nichttrivialer endlicher G-Modul, der ebenfalls eine zyklische p-Gruppe ist. M ist von der Ordnung p^r mit $r \geq 2$. Ist $p \neq 2$, so ist x der Automorphismus $m \longmapsto (1+p^{r-1})m$ von M und $H^1(G,M) = 0$. Ist $p = 2$ und $|M| = 4$, so ist x die Inversion auf M und $|H^1(G,M)| = 2$. Ist schließlich $p = 2$ und $|M|$ größer als 4, so ist $\mathrm{Aut}(M)$ vom Typ $(2,2^{r-2})$ und x ist einer der folgenden drei Automorphismen:

$$m \longmapsto m^{-1}$$
$$m \longmapsto (1+2^{r-1})m$$
$$m \longmapsto (-1+2^{r-1})m$$

Operiert x wie der erste Automorphismus, so ist

$|H^1(G,M)| = 2$. Für die beiden letzten Automorphismen ist $H^1(G,M) = 0$. (Übrigens liefert die obige Diskussion die Klassifikation der nichtabelschen p-Gruppen mit einer zyklischen maximalen Untergruppe.)

(2.5) Lemma

Sei M eine (endliche) elementarabelsche p-Gruppe und G eine endliche p-Gruppe. Ist M ein G-Modul und $H^1(G,M) = 0$, so ist M ein freier $\mathbb{F}_p G$-Modul.

Beweis: Siehe Gruenberg [14], § 10.5 Prop. 11 oder [20], Satz 16.2. □

Sei beispielsweise $|G| = p$ und $M = \mathbb{F}_p G$ der reguläre G-Modul über $\mathbb{F}_p$. Dann ist $H^2(G,M) = 0$ und jede Erweiterung von M durch G zerfällt. Offensichtlich ist das semidirekte Produkt $M \cdot G \cong Z_p \wr Z_p$ isomorph zu einer p-Sylowgruppe der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(p^2)$. $Z_p \wr Z_p$ ist eine nichtreguläre p-Gruppe maximaler Klasse (vgl. [16], Seite 379).

(2.6) Lemma

Sei G eine reguläre p-Gruppe und N ein Normalteiler von G mit $\mathfrak{V}_1(G) \subseteq N$. Dann ist $Z^1(G/N, Z(N))$ elementarabelsch.

Beweis: Für $\alpha \in \mathrm{Aut}_N^N(G)$ und $x \in G$ gilt nach (Huppert [16], Satz III. 10.6) $(x^{-1}x^\alpha)^p = 1$ genau dann, wenn $x^p = (x^\alpha)^p$ ist. Aber nun ist $x^p \in N$, wird also von α zentralisiert. Folglich haben wir $(x^\alpha)^p = (x^p)^\alpha = x^p$ und damit $[x,\alpha]^p = 1$. Infolgedessen liegen die Werte des verschränkten Homomorphismus $f_\alpha : Nx \longmapsto [x,\alpha]$ in $\Omega_1(Z(N))$. Aus (1.1) ergibt sich, daß

$$Z^1(G/N,Z(N)) = Z^1(G/N,\Omega_1(Z(N)))$$

elementarabelsch ist. □

3. Maximale Untergruppen

In diesem Abschnitt sei durchweg G eine endliche nichtabelsche p-Gruppe. Wir orientieren unsere Überlegungen an der Frage, wann $\mathrm{Aut}_{\Phi}^{\Phi}(G) \neq \mathrm{Inn}(G)$ ist. Es zeigt sich, daß die Antwort nur dann problematisch ist, wenn $Z(G) \subsetneq Z(M) \subseteq \Phi(G)$ gilt für alle maximalen Untergruppen M von G. In diesem Fall nennnen wir G "Frattinisch".

(3.1) Lemma

Für jede maximale Untergruppe M von G gilt stets die folgende Alternative:

(A) Entweder ist $Z(M) \subseteq Z(G)$

oder (B) $Z(G) \subsetneq Z(M)$.

Beweis: Wir nehmen $Z(M) \not\subseteq Z(G)$ an. Dann ist $C_G(Z(M)) = M$ und $C_G(M) \subseteq C_G(Z(M)) = M$. Somit ist $Z(G) \subseteq C_G(M) \subseteq M$ und $Z(G) \subsetneq Z(M)$. □

(3.2) Lemma

Sei M eine maximale Untergruppe von G.

(A) Ist $Z(M) \subseteq Z(G)$, so gilt $C_G(M) = Z(G)$.

(B) Ist $Z(G) \subsetneq Z(M)$, so gilt $C_G(Z(M)) = M$ und $C_G(M) = Z(M)$.

Beweis: Sei $C_G(M) \neq Z(M)$. Dann ist $G = C_G(M)M$, und $C_G(M)/Z(M) \cong G/M$ ist zyklisch der Ordnung p. Folglich ist $C_G(M)$ abelsch, woraus $C_G(M) = Z(G)$ folgt. Dies zeigt (A) und (B). □

(3.3) Lemma

Sei M eine maximale Untergruppe von G. Ist $Z(M) \subseteq Z(G)$, so ist $\mathrm{Aut}_M^M(G)$ eine nichttriviale elementarabelsche p-Gruppe, die disjunkt zu Inn(G) ist.

Beweis: Nach (1.1) gilt $\mathrm{Aut}_M^M(G) \cong \mathrm{Hom}(G/M, Z(M))$. Wegen $|G/M| = p$ und $Z(M) \neq 1$ ist somit $\mathrm{Aut}_M^M(G) \neq 1$ und elementarabelsch. Nach (3.2) ist $C_G(M) = Z(G)$, daher $\mathrm{Aut}_M^M(G) \cap \mathrm{Inn}(G) = 1$. □

Die Lemmata (3.1) bis (3.3) führen alle uns interessierenden Fragestellungen zurück auf p-Gruppen G, für die $Z(G) \subsetneq Z(M)$ gilt für alle maximalen Untergruppen M von G.

(3.4) Lemma

Es gelte $Z(G) \subsetneq Z(M)$ für alle maximalen Untergruppen

M von G. Dann sind äquivalent:

(i) G ist nicht Frattinisch.

(ii) G ist ein zentrales Produkt (mit vereinigten Zentren) zweier Untergruppen R und S, wobei $R/Z(R)$ elementarabelsch der Ordnung p^2 ist. (Es gilt also $Z(G) = Z(R) = Z(S)$, $Z(G) = R \cap S$ und $[R,S] = 1$).

(iii) $C_G(\Phi(G)) \not\subseteq \Phi(G)$.

(iv) $C_G(Z(\Phi(G))) \neq \Phi(G)$.

(v) Es gibt eine maximale Untergruppe M von G mit $Z(M) \cap \Phi(G) = Z(G)$ und $|Z(M)/Z(G)| = p$.

Beweis: (i)$\Longrightarrow$(ii): Sei G nicht Frattinisch. Es gibt dann maximale Untergruppen M und N von G derart, daß $G = Z(M)N$ ist. Wäre $Z(N) \subseteq M$, so hätte man mit (3.2) den Widerspruch

$$N = C_G(Z(N)) \supseteq C_G(M) = Z(M).$$

Somit ist $Z(N) \not\subseteq M$. Wir behaupten weiter, daß $Z(M) \cap N = Z(G)$ ist. Wenn nicht, so wäre

$$M = C_G(Z(M) \cap N) \supseteq C_G(N) = Z(N),$$

ein Widerspruch. Ebenso zeigt man $Z(N) \cap M = Z(G)$. Sowohl in $Z(M)$ als auch in $Z(N)$ hat dann $Z(G)$ Index p.

Daher ist $R = Z(M)Z(N)$ ein nichtabelscher Normalteiler von G derart, daß $R/Z(R)$ elementarabelsch der Ordnung p^2 ist. Insbesondere ist $Z(R) = Z(G)$. Ist $S = C_G(R)$, so ist $R \cap S = Z(R)$. Da $S = M \cap N$ in G Index p^2 hat, ist $G = RS$ ein zentrales Produkt von R und S. Unmittelbar folgt auch $Z(S) = Z(G)$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii): Nach Voraussetzung ist $G = RS$ ein zentrales Produkt zweier Untergruppen R und S von G mit $\Phi(G) \subseteq S$. Es ist also $C_G(\Phi(G)) \supseteq R$. Da $R \not\subseteq \Phi(G)$ ist, ergibt sich (iii).

(iii)$\Longrightarrow$(iv): Klar.

(iv)$\Longrightarrow$(v): Sei T das Erzeugnis der Zentren der maximalen Untergruppen von G. Angenommen, es ist $T \subseteq \Phi(G)$. Dann ist $T \subseteq Z(\Phi(G))$. Andererseits gilt nach (3.2)(B)

$$C_G(T) \subseteq \bigcap\{M \mid M \text{ maximal in } G\}.$$

Folglich ist $C_G(T) = \Phi(G)$ und $C_G(Z(\Phi(G))) = \Phi(G)$, entgegen der Voraussetzung (iv). Es existiert also eine maximale Untergruppe M von G mit $Z(M) \not\subseteq \Phi(G)$, d.h. G ist nicht Frattinisch. Wie im Beweisschritt (i)$\Longrightarrow$(ii) erkennt man, daß $|Z(M)/Z(G)| = p$ ist.

(v)$\Longrightarrow$(i): Klar. □

Wir werden später sehen, daß sich nicht-Frattinische p-Gruppen relativ einfach behandeln lassen. Beispiele nicht-Frattinischer p-Gruppen sind etwa die speziellen p-Gruppen, aber auch die p-Gruppen maximaler Klasse. Sei nämlich G von maximaler Klasse. Ist G keine Ausnahmegruppe, so gibt es eine maximale Untergruppe M von G mit $Z(M) = Z(G)$ (Huppert [16], Satz III. 14.22). Ist G eine Ausnahmegruppe, so gilt dies ebenfalls für die ausgezeichnete maximale Untergruppe M von G ($M = G_1$ in der Notation von Huppert [16]).

Offenbar hat jede Frattinische p-Gruppe mindestens die Ordnung p^5. Wir geben nun Beispiele Frattinischer p-Gruppen und beschreiben zugleich ein Konstruktionsprinzip. Sei $\overline{G}$ eine p-Gruppe und $A = A_p(\overline{G})$ der Frattini-Modul von $\overline{G}$ über $\mathbb{F}_p$ (für Details siehe den Anhang!). Nach Gaschütz [9] gibt es bis auf Isomorphie genau eine Gruppenerweiterung $1 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow 1$ mit $A \subseteq \Phi(G)$. Wir nennen G die maximale Frattini-Erweiterung von $\overline{G}$ über $\mathbb{F}_p$.

(3.5) Beispiel

Ist $\overline{G}$ eine nichtzyklische p-Gruppe, so ist die maximale Frattini-Erweiterung G von $\overline{G}$ über $\mathbb{F}_p$ Frattinisch.

Beweis: Es ist $\overline{G} = G/A$, wo $A = A_p(\overline{G})$ der Frattini-Modul von $\overline{G}$ ist. Da $\overline{G}$ nicht zyklisch ist, operiert $\overline{G}$ treu auf A nach [13, Theorem 3]. Es gilt also $C_G(A) = A$. Ist $H \supseteq A$ eine Untergruppe von G mit $\overline{H} = H/A$, so ist $Z(H) = A^{\overline{H}}$ ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum der Dimension

$$\dim Z(H) = 1 + |G:H|\,(d(G)-1)$$

(siehe Anhang). Ist H eine echte Untergruppe von G oberhalb A, so gilt also $Z(G) \subseteq Z(H) \subseteq A$. Da $A \subseteq \Phi(G)$ ist, ist somit G notwendigerweise Frattinisch. □

Wir haben übrigens gezeigt, daß jede nichtzyklische p-Gruppe $\overline{G}$ epimorphes Bild einer Frattinischen p-Gruppe G mit $d(G) = d(\overline{G})$ ist.

(3.6) Satz

Ist G nicht Frattinisch, so gibt es eine maximale Untergruppe M von G derart, daß $\mathrm{Aut}_M^M(G) \not\subseteq \mathrm{Inn}(G)$ und $H^1(G/M, Z(M)) \neq 0$ ist.

Beweis: Gibt es eine maximale Untergruppe M von G mit $Z(M) \subseteq Z(G)$, so ist nach (3.3) $\mathrm{Aut}_M^M(G) \not\subseteq \mathrm{Inn}(G)$ und $H^1(G/M, Z(M)) = \mathrm{Hom}(G/M, Z(M)) \neq 0$. Es gelte daher $Z(G) \subsetneq Z(M)$ für alle maximalen Untergruppen M von G. Nach Lemma 3.4 ist $G = RS$ ein zentrales Produkt zweier Untergruppen R und S derart, daß $R/Z(R)$ elementarabelsch der Ordnung p^2 und $Z(R) = Z(G) = Z(S) = R \cap S$ ist. Ist N eine maximale Untergruppe von R, so ist $M = NS$ eine maximale Untergruppe von G mit $Z(M) = N$.

Sind alle maximalen Untergruppen N von R oberhalb Z(R) zyklisch, so ist R die Quaternionengruppe der Ordnung 8, und für jedes solche N verschwindet $H^1(R/N, N)$ nicht nach der Bemerkung 2.4. Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_N^N(R)$ ist folglich nicht inner. Wir setzen $\mathrm{Aut}_N^N(R)$ gemäß (1.4) zu einer nichtinneren Automorphismengruppe B von G fort, die $M = NS$ und G/M zentralisiert. Wegen $B \subseteq \mathrm{Aut}_M^M(G)$ ist $\mathrm{Aut}_M^M(G) \not\subseteq \mathrm{Inn}(G)$. Lemma 1.1 ergibt wegen $Z(M) = C_G(M)$ $H^1(G/M, Z(M)) \neq 0$.

Sei also N eine maximale Untergruppe von R oberhalb Z(R), die nichtzyklisch ist. Ist $|N| = 4$, so ist R die Diedergruppe der Ordnung 8. Für die zyklische Untergruppe $\overline{N}$ von R mit $|\overline{N}| = 4$ ist $H^1(R/\overline{N}, \overline{N}) \neq 0$. Wir verfahren nun wie oben.

Sei daher für den Rest des Beweises die Ordnung von N größer als 4. Das Zentrum der maximalen Untergruppe $M = NS$ ist gerade N. Wegen $N^{G/M} = Z(G)$ ist $|N:N^{G/M}| = p$. Lemma 2.3 ergibt $H^1(G/M,N) \neq 0$. □

(3.7) Satz

Ist G nicht Frattinisch, so gilt $H^1(G/\Phi(G),Z(\Phi(G))) \neq 0$.

Beweis: Setze $T = Z(\Phi(G))$. Wir nehmen $H^1(G/\Phi(G),Z(\Phi(G))) = 0$ an. Sei M eine maximale Untergruppe von G. Anwendung der Inflations-Restriktions-Sequenz (Serre [21], p. 125) liefert

$$H^1(G/M,T^M) = 0,$$

denn der Inflationshomomorphismus ist injektiv in der Dimension 1. Der Fixpunktmodul $T^M = H^0(M,T) = Z(M) \cap T$ ist nichttrivial, so daß wir auf $Z(M) \cap T \not\subseteq Z(G)$ schließen können. Nach Lemma 3.1 gilt $Z(G) \subsetneq Z(M)$. Dies ist richtig für alle maximalen Untergruppen M von G. Da G nach Voraussetzung nicht Frattinisch ist, gibt es wegen (3.4) eine maximale Untergruppe M von G mit $Z(M) \cap \Phi(G) = Z(G)$. Wir haben den Widerspruch $Z(M) \cap T \subseteq Z(G)$. □

(3.8) Anmerkung

In § 6 werden wir zeigen, daß $H^1(G/\Phi(G), Z(\Phi(G)))$ von Null verschieden ist, wenn G eine reguläre p-Gruppe mit mehr als p Elementen ist. Ob dies allgemein gilt, bleibt ungeklärt. Für die in Beispiel 3.5 diskutierten Frattinischen p-Gruppen G ist dies jedenfalls richtig. Hier ist nämlich $T = Z(\Phi(G))$ ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum der Dimension

$$\dim T = 1 + p^{d(G)}(d(G)-1)$$

Wäre $H^1(G/\Phi(G), T) = 0$, so wäre T nach Lemma 2.5 ein freier $\mathbb{F}_p[G/\Phi(G)]$-Modul und daher dim T durch $|G/\Phi(G)| = p^{d(G)}$ teilbar. Da $H^1(G/\Phi(G), T) \neq 0$, $C_G(T) = \Phi(G)$ und $Z^1(G/\Phi(G), T) \cong \mathrm{Aut}^{\Phi}_{\Phi}(G)$ elementarabelsch ist, gibt es übrigens hier einen nichtinneren Automorphismus der Ordnung p, der $\Phi(G)$ zentralisiert.

4. Zentrale Automorphismen

Die Gruppe $\mathrm{Aut}^Z(G)$ der zentralen Automorphismen von G ist gerade der Zentralisator $C_{\mathrm{Aut}(G)}(\mathrm{Inn}(G))$. Wir werden zeigen, daß eine nicht-Frattinische p-Gruppe G mit nichtzyklischem Zentrum stets einen nichtinneren Automorphismus der Ordnung p besitzt (Satz 4.6).

Wir beginnen mit einer einfachen Bemerkung:

(4.1) Bemerkung:

Ist G eine endliche Gruppe und $Z(G) \leq G'$, so ist $A = \mathrm{Aut}^Z(G) \cong \mathrm{Hom}(G/G', Z(G))$. Dies sieht man so: Im semidirekten Produkt $G \cdot A$ wenden wir das 3-Untergruppenlemma (Huppert [16], Hilfssatz III. 1.10) an. In der Tat folgt aus $[G,A,G] = 1$, daß $[G',A] = 1$ ist.

Im allgemeinen kann man nicht mehr zeigen, daß $\mathrm{Aut}^Z(G) \cong \mathrm{Hom}(G/G', Z(G))$ ist. Hat allerdings G keinen abelschen direkten Faktor $\neq 1$, so sind wenigstens $\mathrm{Aut}^Z(G)$ und $\mathrm{Hom}(G/G', Z(G))$ gleichmächtige Mengen. Dies ist ein Resultat von Adney-Yen [1]. Wir geben einen neuen handlichen Beweis:

(4.2) Satz (Adney-Yen [1])

Sei G eine endliche Gruppe, die keinen nichttrivialen abelschen direkten Faktor besitzt. Dann gibt es eine Bijektion von $\mathrm{Hom}(G/G',Z(G))$ auf $\mathrm{Aut}^Z(G)$, die jedem Homomorphismus $f: G \longrightarrow Z(G)$ den Automorphismus $x \longmapsto xf(x)$ von G zuordnet.

Beweis: Zu jedem $\alpha \in \mathrm{Aut}^Z(G)$ definieren wir den Homomorphismus $f_\alpha: G \longrightarrow Z(G)$, gegeben durch $f_\alpha(x) = [x,\alpha] = x^{-1}x^\alpha$. Dann ist $\alpha \longmapsto f_\alpha$ eine injektive Abbildung von $\mathrm{Aut}^Z(G)$ nach $\mathrm{Hom}(G,Z(G))$. Ist umgekehrt $f \in \mathrm{Hom}(G,Z(G))$, so definieren wir $\alpha = \alpha_f: G \longrightarrow G$ durch $x^\alpha = xf(x)$. Man sieht sofort, daß α ein normaler Endomorphismus von G ist (α kommutiert mit allen inneren Automorphismen von G). Nach dem Satz von Fitting (Huppert [16], Satz I. 10.6) ist $G = \mathrm{Ker}(\alpha^r) \times \mathrm{Im}(\alpha^r)$ für eine hinreichend große natürliche Zahl r. Der Kern von α^r ist in $\mathrm{Im}(f) \subseteq Z(G)$ enthalten. Nach Voraussetzung muß $\mathrm{Ker}(\alpha^r) = 1$ sein. Somit ist α ein Automorphismus von G. In der Tat ist $\alpha = \alpha_f \in \mathrm{Aut}^Z(G)$ und $f_{\alpha_f} = f$. □

Besitzt also G keinen abelschen direkten Faktor $\neq 1$, so ist $\mathrm{Aut}^Z(G)$ ein p-Normalteiler von Aut(G). Wir heben einen Spezialfall besonders hervor, der einen elementaren Zugang zu (1.9) eröffnet.

(4.3) Lemma

Ist G eine p-Gruppe der Nilpotenzklasse 2 mit zyklischem Zentrum, so ist $|\mathrm{Aut}^Z(G)| = |G/G'|$.

Beweis: Da G nicht abelsch und Z(G) zyklisch ist, hat G keinen abelschen direkten Faktor $\neq 1$. Nach (4.2) gilt daher $|\mathrm{Aut}^Z(G)| = |\mathrm{Hom}(G/G', Z(G))|$. Wir haben zu zeigen, daß $\exp(G/G')$ ein Teiler von $|Z(G)|$ ist (Dualität abelscher Gruppen).

Die Zuordnung $(xZ(G), yZ(G)) \longmapsto [x,y]$ ist eine bilineare (bihomomorphe) nichtausgeartete Abbildung $G/Z(G) \times G/Z(G) \longrightarrow Z(G)$, deren Bild gerade G' ist. Da $G' \leq Z(G)$ und Z(G) zyklisch ist, erhalten wir

$$|G'| = \exp(G/Z(G)).$$

Nun ist $\exp(G/G')$ ein Teiler von $\exp(G/Z(G)) \cdot \exp(Z(G)/G')$ und $\exp(Z(G)/G') = |Z(G)|/|G'|$. Damit ergibt sich wie gewünscht $\exp(G/G') \leq |Z(G)|$. □

(4.4) Folgerung

Ist $\Phi(G) \leq Z(G)$ und Z(G) zyklisch, so läßt sich jeder p-Automorphismus von Z(G) zu einem zentralen Automorphismus von G fortsetzen.

Beweis: Wir können G als nichtabelsch voraussetzen.

Wegen $\Phi(G) \subseteq Z(G)$ hat G dann die Klasse 2, und es gilt $|G'| = p$. Der Kern des Restriktionshomomorphismus $Aut^Z(G) \longrightarrow Aut(Z(G))$ ist gerade

$$Aut_Z^Z(G) \cong Hom(G/Z(G), Z(G)).$$

Da $\exp(G/Z(G))$ ein Teiler von $\exp(Z(G)) = |Z(G)|$ ist (vgl. Huppert [16], Satz III. 2.13), ist $Hom(G/Z(G), Z(G)) \cong G/Z(G)$. Nach (4.3) ist $|Aut^Z(G)| = |G/G'| = |G|/p$. Also hat die von $Aut^Z(G)$ auf Z(G) induzierte Automorphismengruppe die Ordnung $|Z(G)|/p$. □

(4.5) Folgerung

Sei G eine p-Gruppe der Klasse 2. Genau dann ist $Aut^Z(G) = Inn(G)$, wenn $G' = Z(G)$ zyklisch ist.

Beweis: Es gilt $G' \subseteq Z(G)$ nach Voraussetzung. Ist Z(G) zyklisch, so ist $|Aut^Z(G)| = |G/G'|$ nach (4.3). Mithin ist $Aut^Z(G) = Inn(G)$ dann und nur dann, wenn $G' = Z(G)$ ist. Sei also weiterhin Z(G) nicht zyklisch. Es ist $\exp(G/Z(G))$ ein Teiler von $\exp(Z(G))$. Wir können auf

$$|Aut_Z^Z(G)| = |Hom(G/Z(G), Z(G))| \geq |G/Z(G)|$$

schließen. Wegen $Inn(G) \cong G/Z(G)$ ist somit Inn(G)

echt in $\mathrm{Aut}_Z^Z(G)$ enthalten. □

Wir beweisen schließlich den folgenden Satz:

(4.6) Satz

Sei G eine endliche nichtabelsche p-Gruppe mit nichtzyklischem Zentrum Z(G). Ist G nicht Frattinisch, so besitzt G einen nichtinneren zentralen Automorphismus der Ordnung p.

Beweis: Wegen (3.3) und (3.1) darf man annehmen, daß $Z(G) \subsetneq Z(M)$ ist für alle maximalen Untergruppen M von G. Nach (3.4) gibt es dann eine maximale Untergruppe M von G derart, daß Z(M)/Z(G) die Ordnung p hat. Nach (1.1) ist

$$\mathrm{Aut}_M^Z(G) \cong \mathrm{Hom}(G/M, Z(G)).$$

Da nach Voraussetzung Z(G) nicht zyklisch ist, liegt $\mathrm{Aut}_M^Z(G)$ nicht in Inn(G). □

5. Automorphismen, die die Frattinifaktorgruppe zentralisieren.

Sei G eine endliche p-Gruppe und $\mathrm{Aut}^{\Phi}(G)$ die Gruppe aller Automorphismen von G, die trivial auf $G/\Phi(G)$ operieren. Diese Automorphismengruppe ist von zentraler Bedeutung für das Studium von p-Automorphismen:

(5.1) Lemma (Burnside)

Ist G eine endliche p-Gruppe, so ist $\mathrm{Aut}^{\Phi}(G)$ ein p-Normalteiler von Aut(G).

Einen Beweis findet man etwa in Huppert [16], Satz III. 3.18.

Kürzlich haben Bryant und Kovács [5] gezeigt, daß $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Aut}^{\Phi}(G)$ eine beliebige lineare Gruppe sein kann, d.h. zu vorgegebener linearer Gruppe X auf einem $\mathbb{F}_p$-Vektorraum der Dimension $d \geq 2$ gibt es eine p-Gruppe G mit $d(G) = p^d$, so daß $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Aut}^{\Phi}(G) \cong X$ ist als lineare Gruppen.

Besitzt G keinen abelschen direkten Faktor $\neq 1$, so ist nach Satz 4.2

$$\mathrm{Aut}^{Z}(G) = C_{\mathrm{Aut}(G)}(\mathrm{Inn}(G)) \leq O_p(\mathrm{Aut}(G)).$$

Ist $Z(G) \subseteq \Phi(G)$, dann hat G natürlich keinen abelschen direkten Faktor $\neq 1$, und (5.1) liefert ebenfalls $\mathrm{Aut}^Z(G) \subseteq O_p(\mathrm{Aut}(G))$. Allgemein gilt (vgl. [4], Lemma 2.1):

(5.2) Satz

Für jede endliche nichtabelsche p-Gruppe G gilt $C_{\mathrm{Aut}(G)}(\mathrm{Aut}^\Phi(G)) \subseteq \mathrm{Aut}^\Phi(G)$.

Beweis: Setze $C = C_{\mathrm{Aut}(G)}(\mathrm{Aut}^\Phi(G))$. Wegen $\mathrm{Inn}(G) \subseteq \mathrm{Aut}^\Phi(G)$ ist $C \subseteq \mathrm{Aut}^Z(G)$. C operiert daher trivial auf der Faktorgruppe $G/Z(G)\Phi(G)$. Sei M eine maximale Untergruppe von G mit $Z(G) \not\subseteq M$. Nach (3.1) ist dann $Z(M) = Z(G) \cap M$. Da $Z \cap \Phi = Z(G) \cap \Phi(G) \neq 1$ ist, ist

$$A = \mathrm{Aut}^{Z \cap \Phi}_M(G) \neq 1.$$

Wegen $A \subseteq \mathrm{Aut}^\Phi(G)$ wird A von C normalisiert (zentralisiert). Daher ist die Fixpunktuntergruppe $M = C_G(A)$ C-invariant.

Damit ist gezeigt, daß C alle maximalen Untergruppen von G normalisiert. Infolgedessen operiert C auf dem $\mathbb{F}_p$-Vektorraum $G/\Phi(G)$ als Gruppe von Potenzautomorphismen. Aber C zentralisiert die nichttriviale Faktorgruppe $G/Z(G)\Phi(G)$. Folglich ist $C \subseteq \mathrm{Aut}^\Phi(G)$, wie behauptet. □

Satz 5.2 hat die Konsequenz, daß $\mathrm{Aut}^\Phi(G)$ das Zentrum

von $O_p(\mathrm{Aut}(G))$ sowie die Zentren aller p-Sylowgruppen von Aut(G) umfaßt. Ziel der folgenden Betrachtungen ist es zu zeigen, daß $\mathrm{Aut}^{\Phi}(G)$ fast immer Inn(G) echt enthält. Aus beweistechnischen Gründen untersuchen wir zunächst die Gruppe $\mathrm{Aut}_Z^{\Phi}(G)$ der Automorphismen einer nichtabelschen endlichen p-Gruppe G, die auf $G/\Phi(G)$ und Z(G) trivial operieren.

(5.3) Satz

Sei G eine endliche nichtabelsche p-Gruppe. Dann und nur dann gilt $\mathrm{Aut}_Z^{\Phi}(G) = \mathrm{Inn}(G)$, wenn $\Phi(G) \subseteq Z(G)$ und $\Phi(G)$ zyklisch ist.

Beweis: Sei $\Phi(G) \subseteq Z(G)$ und $\Phi(G)$ zyklisch. Wegen (1.1) stimmt $\mathrm{Aut}_Z^{\Phi}(G) \cong \mathrm{Hom}(G/Z(G), \Phi(G))$ mit $\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G)$ überein. Wir nehmen daher an, daß $\Phi(G) \not\subseteq Z(G)$ oder $\Phi(G)$ nicht zyklisch ist. Zunächst sei $Z(G) \not\subseteq \Phi(G)$. Dann gibt es eine maximale Untergruppe H von G, so daß $G = HZ(G)$ ist. Es ist $Z(H) = Z(G) \cap H$. Aus $\Phi(H) \subseteq Z(H)$ folgt $\Phi(G) \subseteq Z(G)$, so daß $\Phi(G)$ nichtzyklisch ist. Die Ordnung von

$$\mathrm{Aut}_Z^{\Phi}(G) \cong \mathrm{Hom}(G/Z(G), \Phi(G))$$

ist größer als die Ordnung von $\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G)$.

Ist $\Phi(H) \nleq Z(H)$, so nehmen wir induktiv an, daß $\mathrm{Aut}_Z^{\Phi}(H) \nleq \mathrm{Inn}(H)$ ist ($\Phi = \Phi(H)$ und $Z = Z(H)$). Gemäß (1.4) setzen wir $\mathrm{Aut}_Z^{\Phi}(H)$ zu einer nichtinneren Automorphismengruppe von G fort, die Z(G) und $G/\Phi(G)$ zentralisiert.

Wir setzen daher für den Rest des Beweises immer $Z(G) \leq \Phi(G)$ voraus. Darüberhinaus dürfen wir wegen (3.3) annehmen, daß $Z(G) \subsetneq Z(M)$ für alle maximalen Untergruppen M von G ist.

Sei nun $T = Z(\Phi(G))$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $C_G(T) = \Phi(G)$.

Wegen (1.1) und (2.1) dürfen wir $H^2(G/\Phi(G),T) = 0$ annehmen. Selbstverständlich ist $\Phi(G)$ nicht abelsch, denn sonst würde G über $\Phi(G)$ zerfallen, was unmöglich ist. Dies hat zur Folge, daß T nicht zyklisch ist (Huppert [16], Satz III. 7.1). Falls $\Phi^2(G) = \Phi(\Phi(G)) \leq T$ ist, enthält

$$\mathrm{Aut}_T^T(\Phi(G)) \cong \mathrm{Hom}(\Phi(G)/T, T)$$

$\mathrm{Inn}(\Phi(G))$ echt. Im Falle $\Phi^2(G) \nleq T$ dürfen wir induktiv annehmen, daß $\mathrm{Inn}(\Phi(G))$ echt in der $\Phi(G)/\Phi^2(G)$ und T zentralisierenden Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_T^{\Phi}(\Phi(G))$ enthalten ist.

In beiden Fällen haben wir einen $\mathrm{Inn}(\Phi(G))$ echt umfassenden Normalteiler A von $\mathrm{Aut}(\Phi(G))$, der T zentralisiert.

Es sei D die von G auf $\Phi(G)$ induzierte Automorphismengruppe ($D/\mathrm{Inn}(\Phi(G)) \cong G/\Phi(G)$). Wegen $C_G(T) = \Phi(G)$ ist

$$D \cap A = \mathrm{Inn}(\Phi(G)).$$

Sowohl A als auch D sind p-Gruppen und A ist ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}(\Phi(G))$. Folglich zentralisiert D eine nichttriviale Untergruppe $A_o/\mathrm{Inn}(\Phi(G))$ von $A/\mathrm{Inn}(\Phi(G))$. Satz 1.6 ergibt, daß man A_o zu einer Automorphismengruppe B von G fortsetzen kann, die $G/\Phi(G)$ zentralisiert. Wegen $A_o \notin D$ ist B nicht inner, somit auch $\mathrm{Aut}_Z^{\Phi}(G)$.

Fall 2: $C_G(T) \neq \Phi(G)$.

Wir dürfen Lemma 3.4 anwenden, denn G ist nicht Frattinisch. G ist ein zentrales Produkt zweier Untergruppen R und S derart, daß $G/S \cong R/Z(R)$ elementarabelsch der Ordnung p^2 und $Z(R) = Z(G) = Z(S) = R \cap S$ ist. Wir nehmen zunächst an, daß Z(G) nicht zyklisch ist. Dann ist

$$\mathrm{Aut}_Z^Z(R) \cong \mathrm{Hom}(R/Z(R), Z(R))$$

eine nichtinnere Automorphismengruppe von R, die nach (1.4) zu einer nichtinneren Automorphismengruppe B von G fortgesetzt werden kann, die S und G/Z(G) zentralisiert. Wegen $Z(G) \subseteq \Phi(G)$ ist $B \subseteq \mathrm{Aut}_Z^{\Phi}(G)$ und $\mathrm{Aut}_Z^{\Phi}(G)$ ist nicht inner.

Sei nun $Z(G) = Z(S)$ zyklisch. Da wir immer $\Phi(G) \not\subseteq Z(G)$ oder $\Phi(G)$ ist nicht zyklisch annehmen, ist $\Phi(G) \neq Z(G)$. Wir behaupten: Dann und nur dann gilt $\Phi(S) \subseteq Z(S)$, wenn $\Phi(G) = Z(G)$ ist. Dies sieht man so: Es ist $S/Z(S) \cong S/S \cap R \cong G/R$ genau dann elementarabelsch, wenn $\Phi(G) \subseteq R \cap S = Z(G)$ gilt.

Wir schließen somit auf $\Phi(S) \not\subseteq Z(S)$. Induktiv darf man $\mathrm{Aut}_Z^{\Phi}(G) \not\subseteq \mathrm{Inn}(S)$ annehmen ($\Phi = \Phi(S) \subseteq \Phi(G)$). Setze jetzt $\mathrm{Aut}_Z^{\Phi}(S)$ zu einer nichtinneren Automorphismengruppe von G fort, die R zentralisiert. □

Aus (5.3) erhalten wir den ersten Hauptsatz:

(5.4) Hauptsatz

Sei G eine endliche p-Gruppe. Dann und nur dann gilt $\mathrm{Aut}^{\Phi}(G) = \mathrm{Inn}(G)$, wenn G elementarabelsch oder extraspeziell ist.

Beweis: Die Behauptung ist leicht nachgeprüft, wenn

G abelsch ist. Ist G extraspeziell, so ist wegen (4.5)

$$\mathrm{Aut}^{\Phi}(G) = \mathrm{Aut}^{Z}(G) = \mathrm{Inn}(G).$$

Sei daher G eine nichtabelsche und nicht-extraspezielle p-Gruppe. Wir nehmen $\mathrm{Aut}^{\Phi}(G) \subseteq \mathrm{Inn}(G)$ an. Nach (5.3) muß dann $\Phi(G) \subseteq Z(G)$ und $\Phi(G)$ zyklisch sein. Nun ist $\mathrm{Aut}_{\Phi}(G) \subseteq \mathrm{Inn}(G)$ und nach (1.1) ist

$$\mathrm{Aut}_{\Phi}(G) \cong \mathrm{Hom}(G/\Phi(G), \Phi(G)) \cong G/\Phi(G).$$

Infogedessen dürfen wir $\Phi(G) = Z(G)$ voraussetzen. Weiter ist $|Z(G)| \geq p^2$, da G nicht extraspeziell ist. Lemma 4.3 liefert jetzt den Widerspruch

$$\mathrm{Inn}(G) \subsetneq \mathrm{Aut}^{Z}(G) = \mathrm{Aut}^{\Phi}(G). \quad \square$$

Wir haben in (3.7) gezeigt, daß $H^1(G/\Phi(G), Z(\Phi(G)))$ nicht verschwindet für jede (nichtabelsche) nicht-Frattinische p-Gruppe G. Wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden, gilt dies allgemein für reguläre p-Gruppen. Wir geben hier abschließend eine hinreichende Bedingung dafür an, daß $H^1(G/\Phi(G), Z(\Phi(G))) \neq 0$ ist im Frattinischen Falle.

(5.5) Satz

Ist G eine endliche Frattinische p-Gruppe und wird das Zentrum T von $\Phi(G)$ von den Zentren der maximalen Untergruppen von G erzeugt, so ist $H^1(G/\Phi(G),T) \neq 0$.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine maximale Untergruppe M von G, deren Zentrum Z(M) nicht in allen echten Normalteilern von G unterhalb T liegt. Wir wählen eine Untergruppe X von G mit $\Phi(G) \subseteq X \subseteq M$ und $|X/\Phi(G)| = p$. Da $C_G(\Phi(G)) = T$ nach Lemma 3.4 ist, gilt $Z(M) \subseteq Z(X) \subseteq T$.

Angenommen, es ist $H^1(G/\Phi(G),T) = 0$. Nach Satz 2.1 ist dann auch $H^1(X/\Phi(G),T) = 0$. Dies impliziert $Z(X) \subsetneq T$. Aber Z(X) ist nicht in allen maximalen X-Teilmoduln von T enthalten. Aus Lemma 2.2 folgt daher der Widerspruch $H^1(X/\Phi(G),T) \neq 0$. □

6. Nichtinnere Automorphismen der Ordnung p

Nach dem Satz von Gaschütz [11] ist die Ordnung der äußeren Automorphismengruppe einer nichtzyklischen p-Gruppe G durch p teilbar. Es gibt also einen nichtinneren p-Automorphismus von G. Der Satz von Gaschütz sagt jedoch nicht aus, ob es einen nichtinneren Automorphismus der Ordnung p gibt. Einen solchen gibt es natürlich stets dann, wenn etwa Aut(G) über Inn(G) zerfällt oder wenn eine entsprechende lokale Zerfällung in der Automorphismengruppe vorliegt. Ein derartiges Zerfällungskriterium können wir allerdings nicht angeben. Wir zeigen immerhin, daß jede (nichtabelsche) reguläre p-Gruppe einen nichtinneren Automorphismus der Ordnung p hat (Hauptsatz 6.4).

(6.1) Satz

Ist G eine nicht Frattinische p-Gruppe, so besitzt G einen nichtinneren Automorphismus der Ordnung p, der $\Phi(G)$ zentralisiert.

Beweis: Wegen (3.3) und (3.1) dürfen wir $Z(G) \subsetneq Z(M)$ für alle maximalen Untergruppen M von G annehmen. Nach Lemma 3.4 ist G ein zentrales Produkt

(mit vereinigten Zentren) zweier Untergruppen R und S derart, daß $G/S \cong R/Z(R)$ elementarabelsch der Ordnung p^2 ist.

Sind alle maximalen Untergruppen N von R oberhalb Z(R) zyklisch, so ist R die Quaternionengruppe der Ordnung 8. Diese besitzt einen nichtinneren Automorphismus der Ordnung 2, den wir gemäß (1.4) zu einem nichtinneren Automorphismus von G der Ordnung 2 fortsetzen, der $S \supseteq \Phi(G)$ zentralisiert. Sei jetzt N eine maximale nichtzyklische Untergruppe von R oberhalb Z(R). Ist $|N| = 4$, so ist R die Diedergruppe der Ordnung 8. R besitzt einen nichtinneren Automorphismus der Ordnung 2. Wir setzen ihn wie oben auf G fort.

Sei daher für den Rest des Beweises die Ordnung von N größer als 4. Es genügt einen nichtinneren Automorphismus von R der Ordnung p zu finden, der Z(R) zentralisiert. Wegen $|N/Z(R)| = |N/N^{R/N}| = p$ ist nach (2.3) $H^1(R/N,N) \neq 0$ und damit $A = \mathrm{Aut}_N^N(R) \not\subseteq \mathrm{Inn}(R)$. Es ist $H^1(R/N,N) \cong A/A \cap \mathrm{Inn}(R)$ elementarabelsch und $|A \cap \mathrm{Inn}(R)| = |N/Z(R)| = p$. Für $p \neq 2$ ist R regulär, und nach Lemma 2.6 ist $A \cong Z^1(R/N,N)$ elementarabelsch. Da A nicht inner ist, haben wir für ungerade p die Behauptung gezeigt. Sei also $p = 2$. Der kritische Fall ist der, daß $A \cap \mathrm{Inn}(R)$ die einzige Untergruppe von A

der Ordnung 2 ist. In diesem Fall ist A zyklisch der Ordnung 4. Dann ist aber B = $\langle \mathrm{Inn}(R), A \rangle$ eine zur Diedergruppe der Ordnung 8 isomorphe Untergruppe von $\mathrm{Aut}_Z(R)$. Da B über Inn(R) zerfällt, hat R einen nichtinneren Automorphismus der Ordnung 2, der Z(R) zentralisiert. □

(6.2) Bemerkung

Sei G eine extraspezielle p-Gruppe. Dann ist G nicht Frattinisch, hat also nach (6.1) einen nichtinneren Automorphismus der Ordnung p. Ist $p \neq 2$, so zerfällt Aut(G) über Inn(G) nach einer Feststellung von Griess [12] (siehe auch Schmid [20], Übungsaufgabe 7, Seite 69); daher ist dies auch eine Konsequenz des Satzes von Gaschütz [11].

Ist $p = 2$ und $|G| \geq 2^7$, so zerfällt jedoch Aut(G) nicht über Inn(G) (Griess [12]).

Zerfällungskriterien für die Automorphismengruppe hat R. Laue [17] angegeben. Sie sind jedoch nicht schlagkräftig genug, unser Problem im allgemeinen zu lösen. Ein weiteres Kriterium findet man auch in ([20], 7.11 Folgerung): Ist N ein abelscher charakteristischer Normalteiler von G, so daß G über N zerfällt, so zerfällt Aut(G) über $\mathrm{Aut}_N^N(G)$.

(6.3) Satz

Ist G eine nichtabelsche reguläre p-Gruppe, so ist $H^1(G/\Phi(G),Z(\Phi(G))) \neq 0$.

Beweis: Wegen (3.7) können wir annehmen, daß G Frattinisch ist. Setze $T = Z(\Phi(G))$. Nach (2.6) ist $Z^1(G/\Phi(G),T)$ elementarabelsch. Nach (1.1) impliziert dies, daß T/Z(G) elementarabelsch ist.

Wähle eine Untergruppe $X/\Phi(G) = \langle x\Phi(G)\rangle$ von $G/\Phi(G)$ der Ordnung p. Da G Frattinisch ist, ist der Fixmodul $T^X = Z(X) \cap T \supsetneq Z(G)$. Wir schließen indirekt und nehmen $H^1(G/\Phi(G),T) = 0$ an. Nach dem Satz (2.1) von Gaschütz ist dann auch $H^2(X/\Phi(G),T) = 0$, also

$$T^X = T^\sigma \supsetneq Z(G),$$

wobei T^σ das Bild von T unter der Spurabbildung $\sigma: a \longmapsto a^\sigma = a^{1+x+\cdots+x^{p-1}}$ von T ist. Es gibt also ein $t \in T$ derart, daß t^σ nicht in Z(G) liegt.

Betrachte $H_0 = \langle t^{x^i} Z(G) \mid 0 \leq i \leq p-1\rangle$ und $H = \langle H_0, xZ(G)\rangle$. H_0 ist ein elementarabelscher Normalteiler von H mit zyklischer Faktorgruppe H/H_0. Da Untergruppen und Faktorgruppen regulärer Gruppen

regulär sind, ist H regulär. Wegen $H' \subseteq H_0$ ist H' elementarabelsch und somit gilt $(ab)^p = a^p b^p$ für alle $a,b \in H$. Es gilt aber einerseits

$$t^p x^{-p} Z(G) = x^{-p} Z(G)$$

und andererseits

$$(tx^{-1})^p Z(G) = t^\sigma x^{-p} Z(G).$$

Da t^σ nicht in Z(G) liegt, haben wir den gesuchten Widerspruch. □

(6.4) Hauptsatz

Ist G eine nichtabelsche reguläre p-Gruppe, so gibt es einen nichtinneren Automorphismus von G der Ordnung p, der $\Phi(G)$ zentralisiert.

Beweis: Ist G nicht Frattinisch, so folgt die Behauptung aus (6.1). Ist G Frattinisch, so ist $C_G(Z(\Phi(G))) = \Phi(G)$ nach (3.4) und

$$H^1(G/\Phi(G), Z(\Phi(G))) \neq 0$$

nach (6.3). Nach (1.1) ist also $\mathrm{Aut}_{\Phi}^{\Phi}(G) \not\subseteq \mathrm{Inn}(G)$, und

wegen $\mathrm{Aut}_{\Phi}^{\Phi}(G) \cong Z^1(G/\Phi(G), Z(\Phi(G)))$ ist $\mathrm{Aut}_{\Phi}^{\Phi}(G)$ elementarabelsch nach (2.6). Damit ist alles bewiesen. □

Wir haben schon in Abschnitt 3 überlegt, daß p-Gruppen maximaler Klasse nicht Frattinisch sind. Da eine p-Gruppe G maximaler Klasse mit $|G| \geq p^{p+1}$ nicht regulär ist (Huppert [16], Satz III. 14.21), gibt es also viele irreguläre p-Gruppen mit nichtinneren Automorphismen der Ordnung p. Tatsächlich haben wir kein Beispiel einer nichtabelschen p-Gruppe, für die dies nicht zutrifft. Daher die

Vermutung:

Jede endliche nichtabelsche p-Gruppe besitzt einen nichtinneren Automorphismus der Ordnung p.

Anhang

Wir geben die benötigten Informationen über die maximalen Frattini-Erweiterungen einer endlichen p-Gruppe $\overline{G}$. Für eine ausführliche Darstellung sei auf [13], [14], [20] verwiesen. Sei $P \twoheadrightarrow J(\mathbb{F}_p\overline{G})$ die projektive Hülle des Jacobson-Radikals $J(\mathbb{F}_p\overline{G})$ des Gruppenringes $\mathbb{F}_p\overline{G}$. Der Kern dieser projektiven Hülle ist der Frattini-Modul $A = A_p(\overline{G})$ von $\overline{G}$ über $\mathbb{F}_p$. Gaschütz [9] hat gezeigt, daß es bis auf Isomorphie über $\overline{G}$ genau eine Gruppenerweiterung $1 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow 1$ gibt mit $A \subseteq \Phi(G)$. Nach einem Satz von Tate (siehe [20], Satz 21.12) gilt $H^n(\overline{G},A) \cong \mathbb{F}_p$ für $n = 1, 2$, vorausgesetzt $\overline{G}$ ist nicht trivial.

Man kann die maximale Frattini-Erweiterung $1 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow 1$ von $\overline{G}$ über $\mathbb{F}_p$ auch über jede minimale freie Präsentation $1 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow 1$ von $\overline{G}$ konstruieren (d.h. F frei vom Range $d(\overline{G})$). Es ist dann $A \cong R/R'R^p$ und $G \cong F/R'R^p$. Aus dem Schreierschen Untergruppensatz ergibt sich unmittelbar $\dim_{\mathbb{F}_p} A = 1 + |\overline{G}|(d(\overline{G})-1)$.

Wir beweisen:

Satz

Sei $1 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow 1$ die maximale Frattini-Erweiterung der endlichen p-Gruppe $\overline{G}$ über $\mathbb{F}_p$. Ist G nicht zyklisch, so gilt für jede Untergruppe $H \supseteq A$ von G:

(a) $Z(H) \subseteq A$ und $C_G(Z(H)) = H$.

(b) $\dim_{\mathbb{F}_p} Z(H) = 1 + |G:H|(d(G)-1)$.

(c) Ist H ein echter Normalteiler von G (oberhalb A), so ist $H^1(G/H, Z(H)) \cong \mathbb{F}_p$.

Beweis: Nach (Griess-Schmid [13], Theorem 3) operiert $\overline{G}$ treu auf $A = A_p(\overline{G})$ (weil $\overline{G}$ nicht zyklisch ist). Folglich gilt $C_G(A) = A$. Dies impliziert, daß Z(H) der Fixpunktmodul $A^{\overline{H}}$ unter $\overline{H} = H/A$ ist; insbesondere gilt $Z(H) \subseteq A$. Weiter ist A als $\mathbb{F}_p\overline{H}$-Modul nach [13, Lemma 6] isomorph zu einer direkten Summe $A_p(\overline{H}) \oplus Q$ mit einem freien $\mathbb{F}_p\overline{H}$-Modul Q. Wie eingangs schon ausgeführt, gilt für die Dimension des Frattini-Moduls

$$\dim A_p(\overline{H}) = 1 + |\overline{H}|(d(\overline{H})-1).$$

Mit diesen Informationen läßt sich (b) ohne Mühe ableiten.

Zunächst haben wir
$\dim A_p(\overline{H})^{\overline{H}} = \dim H^1(\overline{H}, A_p(\overline{H})) = d(\overline{H})$. Ist Q die direkte

Summe von m Kopien von $\mathbb{F}_p\overline{H}$, so ist dim $Q^{\overline{H}} = m$. Es gilt

$$\begin{aligned}\dim Q &= \dim A - \dim A_p(\overline{H}) \\ &= |\overline{G}|(d(\overline{G})-1) - |\overline{H}|(d(\overline{H})-1) \\ &= |\overline{H}|\,(|G:H|(d(G)-1) - (d(\overline{H})-1)).\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\dim A^{\overline{H}} &= d(\overline{H}) + |G:H|(d(G)-1) - (d(\overline{H})-1) \\ &= 1 + |G:H|(d(G)-1).\end{aligned}$$

Dies zeigt (b).

Setze $K = C_G(Z(H))$. Es ist $K \supseteq H$ und $Z(K) \supseteq Z(H)$, und nach (b) gilt

$$\dim Z(K) = 1 + |G:K|(d(G)-1) \leq \dim Z(H).$$

Dies erzwingt $K = H$, wie behauptet.

Es bleibt (c) zu zeigen. Da nach dem Satz von Tate $H^1(\overline{G},A) \cong \mathbb{F}_p$ ist, liefert die Anwendung der Inflations-Restriktions-Sequenz dim $H^1(G/H,Z(H)) \leq 1$. Wäre $H^1(G/H,Z(H)) = 0$, so wäre $Z(H)$ nach Lemma 2.5 ein freier $\mathbb{F}_p[G/H]$-Modul. Das ist aber nur möglich, wenn dim $Z(H)$ durch $|G/H|$ teilbar ist. Wegen (b) gilt also $H^1(G/H,Z(H)) \neq 0$, und wir sind fertig. □

Literaturverzeichnis

1. Adney, J.E. und Yen, T.: Automorphisms of a p-group. Ill. J. Math. 9, 137 - 143 (1965)

2. Artin, E.: Cohomologietheorie. Vorlesungsausarbeitung, München 1957

3. Baer, R.: Erweiterungen von Gruppen und ihren Isomorphismen. Math. Z. 38, 375 - 461 (1934)

4. Beisiegel, B.: Finite p-groups with nontrivial p'-automorphisms. Arch. Math. 31, 209 - 216 (1978)

5. Bryant, R.M. and Kovács, L.G.: Lie representations and groups of prime power order. J.London Math. Soc. (2), 17, 415 - 421 (1978)

6. Buckley, J.: Automorphisms of isoclinic p-groups. J. London Math. Soc. 12, 37 - 44 (1975)

7. Cartan, H., Eilenberg, S.: Homological Algebra. Princeton University Press 1956

8. Cooper, C.D.H.: Power automorphisms of a p-group. Math. Z. 107, 335 - 356 (1968)

9. Gaschütz, W.: Über modulare Darstellungen endlicher Gruppen, die von freien Gruppen induziert werden. Math. Z. 60, 274 - 286 (1954)

10. Gaschütz, W.: Kohomologische Trivialitäten und äußere Automorphismen von p-Gruppen. Math. Z. 88, 432 - 433 (1965)

11. Gaschütz, W.: Nichtabelsche p-Gruppen besitzen äußere p-Automorphismen. J. Algebra 4, 1 - 2 (1966)

12. Griess, R.L.: Automorphisms of extraspecial groups and nonvanishing degree 2 cohomology. Pacific J. Math. 48, 403 - 422 (1973)

13. Griess,R.L. and Schmid, P.: The Frattini module. Arch.Math. 30, 256 - 266 (1978)

14. Gruenberg, K.W.: Cohomological Topics in Group Theory. Springer Lecture Notes 143, 1970

15. Hilton, P.J., Stammbach, U.: A Course in Homological Algebra. Springer Graduate Texts in Math. 4, 1971

16. Huppert,B.: Endliche Gruppen I. Springer 1967

17. Laue, R.: Zerfall von Automorphismengruppen endlicher Gruppen. Arch. Math. 29, 367 - 374 (1977)

18. Mac Lane, S.: Homology. Springer 1967

19. Schmid, P.: Normal p-subgroups in the group of outer automorphisms of a finite p-group. Math. Z. 147, 271 - 277 (1976)

20. Schmid, P.: Cohomologische Methoden in der Gruppentheorie. Vorlesungsausarbeitung, Tübingen 1977

21. Serre, J.P.: Corps Locaux. Hermann 1968

22. Stammbach, U.: Homology in Group Theory. Springer Lecture Notes 359, 1973

Lebenslauf

Am 12. März 1953 wurde ich als erster Sohn des Mechanikers Heribert Müller und seiner Ehefrau Anneliese, geb. Gwinner, in Tübingen geboren. Aufgewachsen bin ich in Rottenburg, wo ich von 1960 - 1964 die dortige Grundschule besuchte. 1964 trat ich ins Eugen-Bolz-Gymnasium ein, an dem ich 1972 die Reifeprüfung ablegte. Im Wintersemester 1972/73 begann ich mit dem Studium der Mathematik in Tübingen, wo ich im Herbst 1974 das Vordiplom in Mathematik ablegte. Meine ganze Studienzeit verbrachte ich in Tübingen. Im März 1978 beendete ich mein Studium mit dem Diplom in Mathematik. Seither bin ich als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut tätig. Die vorliegende Arbeit entstand seit April 1978 unter der Anleitung von Herrn Prof. P. Schmid.

Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herren Betsch, Grölz, Hering, Heyer, Kaup, Kowitz, Kurzweil, Locher, Nagel, Schaefer, Schlotterbeck, Schmid, Schönhage und Wielandt (Mathematik) sowie den Herren Baumann, Gönnenwein, Lenz, Mertens, Mitter, E. Schmid und Wahl (Physik).